Circuit Bouchon

Résumé

Le calcul du circuit bouchon a été donné récemment à un partiel de licence de l'Université de Caen. Face à la lourdeur apparente des calculs, les candidats sont passés à l'exercice suivant.

Mon fils en rentrant a demandé à MAPLE de lui donner le résultat.

MAPLE a sorti : $\omega^2 = -r^2/l^2 + (1/lc)(\sqrt{1+2r^2c/l})$.

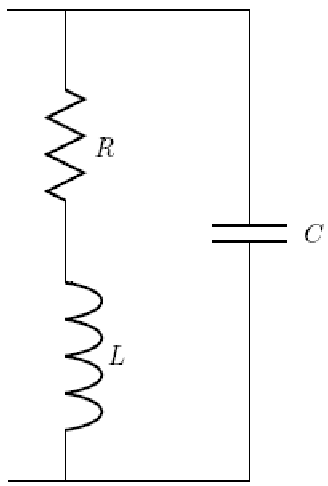
Face à ce résultat inattendu et introuvable dans les manuels d'électricité je me suis demandé si c'était Maple qui se trompait ou les manuels d'enseignement qui étaient FAUX.

A mon grand étonnement, c'est la deuxième hypothèse la bonne.

Je vous transmets ci-joints l'exposé de mes calculs.

Jean DUPONT ing ENSEM

Mise en équation



$$
\begin{aligned}
Z_L &= R + jL\omega \\
Z_C &= \frac{1}{jC\omega} \\
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R+jL\omega} + jC\omega \\
&= \frac{1 + jC\omega(R+jL\omega)}{R+jL\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{R+jL\omega}{1+jC\omega(R+jL\omega)} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega} \\
&= \frac{(R+jL\omega)(1-LC\omega^2-jRC\omega)}{R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2} \\
&= \frac{R(1-LC\omega^2)+RLC\omega^2+j[Lw(1-LC\omega^2)-R^2C\omega^2]}{R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2} \\
&= \frac{R+j\omega[L-C(R^2+L^2\omega^2)]}{R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2} \\
&= R_e + jX_e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{R}{D} \\
X_e &= \frac{\omega[L-C(R^2+L^2\omega^2)]}{D} = \frac{\omega[L(1-LC\omega^2)-R^2C]}{D} \\
D &= R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|Z|^2 &= R_e^2 + X_e^2 \\
&= \frac{R^2+\omega^2[L-C(R^2+L^2\omega^2)]^2}{[R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2]^2} \\
&= \frac{R^2+\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2}{[R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2]^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(|Z|^2)' &= \frac{1}{D^3}\left\{\begin{array}{l}\{2\omega[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2-2\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]2L^2C\omega\}[R^2C^2\omega^2+\\ (1-LC\omega^2)^2]-2\{R^2+\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2\}[2R^2C^2\omega-2(1-LC\omega^2)2LC\omega]\end{array}\right\}\\
&= \frac{2\omega}{D^3}N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N &= \left\{\begin{array}{l}\{[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2-2L^2C\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]\}[R^2C^2\omega^2+\\ (1-LC\omega^2)^2]-2\{R^2+\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2\}[R^2C^2-2LC(1-LC\omega^2)]\end{array}\right.\\
&= \left\{\begin{array}{l}[L(1-LC\omega^2)-R^2C][L(1-LC\omega^2)-R^2C-2L^2C\omega^2][R^2C^2\omega^2+(1-LC\omega^2)^2]\\ \qquad 2\{R^2+\omega^2[L(1-LC\omega^2)-R^2C]^2\}[R^2C^2-2LC(1-LC\omega^2)]\end{array}\right.\\
&= \left\{\begin{array}{l}(L-R^2C-L^2C\omega^2)(L-R^2C-3L^2C\omega^2)(1+R^2C^2\omega^2-2LC\omega^2+L^2C^2\omega^4)\\ -2\{R^2+\omega^2[L^2(1-LC\omega^2)^2+R^4C^2-2R^2LC(1-LC\omega^2)]\}(R^2C^2-2LC+2L^2C^2\omega^2)\end{array}\right.\\
&= \left\{\begin{array}{l}(L^2-2R^2LC+R^4C^2-4L^3C\omega^2+4R^2L^2C^2\omega^2+3L^4C^2\omega^4)(1+R^2C^2\omega^2-2LC\omega^2\\ \qquad +L^2C^2\omega^4)-2(R^2+L^2\omega^2+R^4C^2\omega^2-2R^2LC\omega^2-2L^3C\omega^4+2R^2L^2C^2\omega^4\\ \qquad\qquad +L^4C^2\omega^6)(R^2C^2-2LC+2L^2C^2\omega^2)\end{array}\right.\\
&= \left\{\begin{array}{l}L^2-2R^2LC+R^4C^2-4L^3C\omega^2+4R^2L^2C^2\omega^2+3L^4C^2\omega^4\\ +R^2L^2C^2\omega^2-2R^4LC^3\omega^2+R^6C^4\omega^2-4R^2L^3C^3\omega^4+4R^4L^2C^4\omega^4+3R^2L^4C^4\omega^6\\ -L^3C\omega^2+4R^2L^2C^2\omega^2-2R^4LC^3\omega^2+8L^4C^2\omega^4-8R^2L^3C^3\omega^4-6L^5C^3\omega^6\\ +L^4C^2\omega^4-2R^2L^3C^3\omega^4+R^4L^2C^4\omega^4-4L^5C^3\omega^6+4R^2L^4C^4\omega^6+3L^6C^4\omega^8\\ \\ -2R^4C^2-2R^2L^2C^2\omega^2-2R^6C^4\omega^2+4R^4LC^3\omega^2+4R^2L^3C^3\omega^4-4R^4L^2C^4\omega^4-2R^2L^4C^4\omega^6\\ +4R^2LC+4L^3C\omega^2+4R^4LC^3\omega^2-8R^2L^2C^2\omega^2-8L^4C^2\omega^4+8R^2L^3C^3\omega^4+4L^5C^3\omega^6\\ -4R^2L^2C^2\omega^2-4L^4C^2\omega^4-4R^4L^2C^4\omega^4+8R^2L^3C^3\omega^4+8L^5C^3\omega^6-8R^2L^4C^4\omega^6-4L^6C^4\omega^8\end{array}\right.\\
&= \left\{\begin{array}{l}L^2+2R^2LC-R^4C^2-2L^3C\omega^2-5R^2L^2C^2\omega^2+4R^4LC^3\omega^2-R^6C^4\omega^2\\ +6R^2L^3C^3\omega^4-3R^4L^2C^4\omega^4+2L^5C^3\omega^6-3R^2L^4C^4\omega^6-L^6C^4\omega^8\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Mise en facteur

Cette mise en facteur a pour but de présenter un moyen d'imaginer un programme de factorisation littérale de polynômes par rapport à une indéterminée qu'on notera ici ω.

On recherche les termes indépendants de l'indéterminée, ici

$$L^2 \qquad 2R^2LC \qquad -R^4C^2$$

S'il n'y en a pas, on simplifie le polynôme par l'indéterminée d'exposant minimum, on mémorise ce paramètre et on recommence.

S'ils sont premiers entre eux, le premier terme du polynôme diviseur sera 1, sinon ce premier terme sera leur PGCD. On met ces termes dans la pile du polynôme quotient, après les avoir simplifiés par leur PGCD, et on les extrait du polynôme de base qui devient le polynôme reste.

On a alors $P_Q = L^2+2R^2LC-R^4C^2$ et $P_D = 1$.

On recherche ensuite s'il existe dans le polynôme reste, des termes qui ont un multiple commun avec les termes du polynôme quotient précédemment constitué. C'est une recherche de tronc commun. On ne se soucie pas du coefficient numérique, on prélève la quantité nécessaire de termes. Parfois, pour terminer une liste il faut éventuellement rajouter un terme virtuel dans le polynôme reste.

Ici par exemple,

$$R^2L^2C^2\omega^2 \qquad 2R^4LC^3\omega^2 \qquad -R^6C^4\omega^2$$

sont multiples par, je dis volontairement 'par' et non 'de', $R^2C^2\omega^2$ des termes du polynôme quotient. $R^2C^2\omega^2$ sera le deuxième terme du polynôme diviseur qui devient $P_D = 1 + R^2C^2\omega^2$.

On les extrait numériquement du polynôme reste qui devient:

$$-2L^3C\omega^2 - 6R^2L^2C^2\omega^2 + 2R^4LC^3\omega^2 + 6R^2L^3C^3\omega^4 - 3R^4L^2C^4\omega^4 + 2L^5C^3\omega^6 - 3R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

On recommence jusqu'à ce qu'on ne trouve plus dans le polynôme reste de série de termes qui ont un multiple commun avec le polynôme quotient.

On trouve que

$$-2L^3C\omega^2 \qquad -4R^2L^2C^2\omega^2 \qquad 2R^4LC^3\omega^2$$

sont multiples par $-2LC\omega^2$, et après déduction le polynôme reste devient:

$$P_R = -2R^2L^2C^2\omega^2 + 6R^2L^3C^3\omega^4 - 3R^4L^2C^4\omega^4 + 2L^5C^3\omega^6 - 3R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

On trouve ensuite

$$2R^2L^3C^3\omega^4 \qquad -R^4L^2C^4\omega^4$$

qui sont multiples par $L^2C^2\omega^4$.

Il manque un terme en $L^4C^2\omega^2$, on l'ajoute et on le retranche, et le polynôme reste devient :

$$P_R = -\boldsymbol{L^4C^2\omega^2} - 2R^2L^2C^2\omega^2 + 4R^2L^3C^3\omega^4 - 2R^4L^2C^4\omega^4 + 2L^5C^3\omega^6 - 3R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

On ne trouve plus de multiple commun du polynôme quotient.

Le polynôme diviseur se compose de tous les multiples communs trouvés précédemment:

$$P_D = 1 + R^2C^2\omega^2 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4$$

Les termes restant du polynôme reste doivent être des multiples communs du polynôme diviseur.

Ainsi

$$-2R^2L^2C^2\omega^2 \qquad -2R^4L^2C^4\omega^4 \qquad 4R^2L^3C^3\omega^4 \qquad -2R^2L^4C^4\omega^6$$

sont multiples par -$2R^2L^2C^2\omega^2$ du polynôme diviseur et le polynôme reste devient :

$$P_R = -\boldsymbol{L^4C^2\omega^2} + 2L^5C^3\omega^6 - R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

Tandis que le polynôme quotient devient : $P_Q = L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 - 2R^2L^2C^2\omega^2$

Les quatre derniers termes doivent être multiples du polynôme diviseur. Si ce n'est pas le cas le polynôme de base n'est pas factorisable.

Ici on trouve qu'ils ont $-L^4C^2\omega^4$ comme facteur commun d'où $P_R = 0$ et

$$P_Q = L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4$$

Diagramme du calcul:

$$\begin{aligned} P_B = \ & L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 - 2L^3C\omega^2 - 5R^2L^2C^2\omega^2 + 4R^4LC^3\omega^2 - R^6C^4\omega^2 \\ & + 6R^2L^3C^3\omega^4 - 3R^4L^2C^4\omega^4 + 2L^5C^3\omega^6 - 3R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccrcl} & & 1 & \longrightarrow & L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 \\ & \nearrow & & & \\ \left.\begin{array}{c} L^2 \\ 2R^2LC \\ -4R^4C^2 \end{array}\right\} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{array}{r} R^2C^2\omega^2 \\ \\ -2LC\omega^2 \end{array} & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{l} R^2L^2C^2\omega^2 + 2R^4LC^3\omega^2 - R^6C^4\omega^2 \\ \\ -2L^3C\omega^2 - 4R^2L^2C^2\omega^2 + 2R^4LC^3\omega^2 \end{array} \\ & \searrow & & & \\ & & L^2C^2\omega^4 & \longrightarrow & L^4C^2\omega^4 + 2R^2L^3C^3\omega^4 - R^4L^2C^4\omega^4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_R = \ & -\boldsymbol{L^4C^2\omega^2} - 2R^2L^2C^2\omega^2 + 4R^2L^3C^3\omega^4 \\ & - 2R^4L^2C^4\omega^4 + 2L^5C^3\omega^6 - 3R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8 \end{aligned}$$

$$-2R^2L^2C^2\omega^2 \longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} 1 & \longrightarrow \\ R^2C^2\omega^2 & \longrightarrow \\ -2LC\omega^2 & \longrightarrow \\ L^2C^2\omega^4 & \longrightarrow \end{array}\right\} \ -2R^2L^2C^2\omega^2 - 2R^4L^2C^4\omega^4 + 4R^2L^3C^3\omega^4 - 2R^2L^4C^4\omega^6$$

$$P_R = \ -\boldsymbol{L^4C^2\omega^2} + 2L^5C^3\omega^6 - R^2L^4C^4\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

$$-L^4C^2\omega^4 \longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} 1 & \longrightarrow \\ R^2C^2\omega^2 & \longrightarrow \\ -2LC\omega^2 & \longrightarrow \\ L^2C^2\omega^4 & \longrightarrow \end{array}\right\} \ -L^4C^2\omega^4 - R^2L^4C^4\omega^6 + 2L^5C^3\omega^6 - L^6C^4\omega^8$$

$$P_R = \ 0$$

Le polynôme numérateur de la dérivée du carré du module de l'impédence complexe du circuit bouchon peut donc s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes:

$$\begin{aligned} N = \ & (1 + R^2C^2\omega^2 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4)(L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4) \\ = \ & (R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2)(L^2 + 2R^2LC - R^4C^2 - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4) \end{aligned}$$

Etude de l'équation

On constate que l'un des polynômes facteurs n'est autre que le dénominateur de |Z|, qui est strictement positif quelque soit ω.

On peut donc simplifier par D d'où:

$$(|Z|^2)' = \frac{2\omega}{D^2}(-L^4C^2\omega^4 - 2R^2L^2C^2\omega^2 + L^2 + 2R^2LC - R^4C^2)$$

Pour trouver les extremums du module de l'impédance il faut annuler la dérivée et résoudre:

$$L^4C^2\omega^4 + 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^2 - 2R^2LC + R^4C^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4[R^4L^4C^4 + L^4C^2\,(L^2 + 2R^2LC - R^4C^2)] \\ &= L^4C^2(2R^2LC + L^2)\end{aligned}$$

$$\omega^2 = \frac{-R^2C^2 \pm C\sqrt{2\,LCR^2 + L^2}}{L^2C^2}$$

Seule la solution positive est valable, et de plus ω^2 n'est positif que pour :

$$R^2C < \sqrt{2\,LCR^2 + L^2}$$

$$R^2 < (1+\sqrt{2})\frac{L}{C}$$

(signe du trinôme $x^2 - 2\lambda x - \lambda^2 = 0$)

Pour R plus grand il n'y a plus de résonnance.

d'où:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{1}{LC}\sqrt{1 + 2LC\frac{R^2}{L^2}} - \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC}\sqrt{1 + 2\frac{R^2C}{L}} - \frac{R^2}{L^2} \\ LC\omega^2 &= \sqrt{1 + 2RC\frac{R}{L}} - RC\frac{R}{L} = \sqrt{1 + 2\frac{R^2C}{L}} - \frac{R^2C}{L}\end{aligned}$$

Ce qui est la formule donnée par MAPLE

Discussion de la formule

Pour fixer les ordres de grandeur prenons: $\omega = 10^6$ $\frac{L}{C} = 10^6$

avec: $L = 10^{-3}H$, $C = 10^{-9}F$ et $R = 1\Omega$

vérifiant: $LC\omega^2 = 1$

on obtient: $2RC\frac{R}{L} = 2.10^{-9}\frac{1}{10^{-3}} = 2.10^{-6}$

Il est donc légitime de faire un développement limité du radical :

$$\begin{aligned}LC\omega^2 &= (1 + 2RC\frac{R}{L})^{\frac{1}{2}} - RC\frac{R}{L} \\ &= 1 + \mathrm{RC}\frac{R}{L} - \frac{1}{4}R^2C^2\frac{R^2}{L^2} - RC\frac{R}{L} \\ &= 1 - \frac{1}{4}R^2C^2\frac{R^2}{L^2} = 1 - \frac{1}{4}(\frac{CR^2}{L})^2\end{aligned}$$

On vérifie que la formule est homogène puisque RC est une constante de temps et $\frac{R}{L}$ l'inverse d'une constante de temps.

Cette formule donne $LC\omega^2 = 1$ à 10^{-12} près.

Dans ces conditions, on obtient:

$$|Z|^2 \simeq \frac{1 + 10^{12}(\frac{1}{4}10^{-3}.10^{-12} - 10^{-9})^2}{[(\frac{1}{4}10^{-12})^2 + 10^{-18}.10^{12}]^2} \simeq \frac{1 + 10^{-6}}{10^{-12}} \simeq 10^{12}$$

$$|Z| \simeq 10^6 \Omega$$

Le circuit a une impédance de 1 MΩ, d'où son nom de circuit bouchon .

La formule approchée montre que la fréquence de résonnance diminue lorsque la résistance de la bobine augmente jusqu'à l'étouffement pour $\omega = 0$. Cette valeur est atteinte pour:

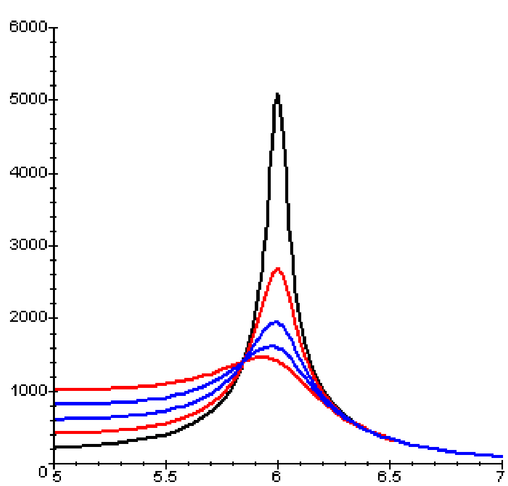
$$\sqrt{1 + 2RC\frac{R}{L}} = RC\frac{R}{L}$$
$$1 + 2RC\frac{R}{L} = (RC\frac{R}{L})^2$$

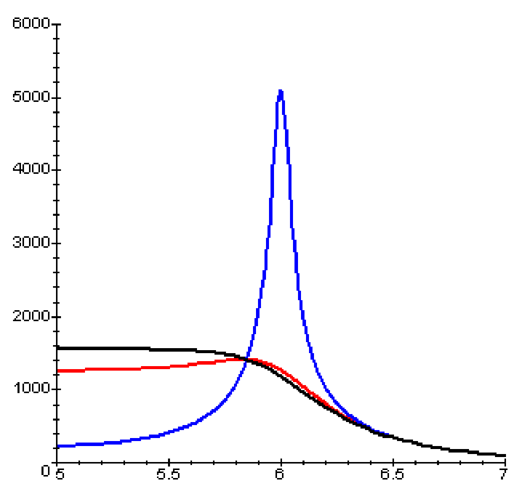
qui est de la forme $\quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad$ soit $x = 1 \pm \sqrt{2}$ d'où:

$$R^2 = \frac{L}{C}(1 + \sqrt{2})$$
$$R = \sqrt{\frac{L}{C}(1 + \sqrt{2})}$$

Avec les paramètres choisis, on trouve: $R = 1,55\,k\Omega$, cette valeur est énorme, démesurée par rapport aux valeurs couramment rencontrées dans les circuits électroniques.

Les courbes de |Z| en fonction de ω sont tracées à l'aide de Maple , pour des valeurs de R exagérément grandes (200, 400, 600, 800 Ω) afin d'être présentables:





On constate que ces courbes se coupent en un point où l'impédance et la pulsation sont indépendantes de R.

Sur la figure de droite, on a représenté la courbe correspondant à l'amortissement critique ainsi que la courbe qui a son sommet au point d'intersection.

Cherchons les coordonnées de ce point, ce qui nous donnera l'avantage de pouvoir mettre en application la méthode de mise en facteur décrite plus haut.

Il faut:

$$|Z(R1)|^2 = |Z(R2)|^2$$

avec

$$|Z(R)|^2 = \frac{R^2 + \omega^2[L(1 - LC\omega^2) - R^2C]^2}{[R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2]^2}$$

On va tester si le numérateur peut se décomposer en un produit de polynômes :

$$N = R^2 + L^2\omega^2 + R^4C^2\omega^2 - 2R^2LC\omega^2 - 2L^3C\omega^4 + 2R^2L^2C^2\omega^4 + L^4C^2\omega^6$$

On cherche les termes indépendants de l'indéterminée, il n'y en a qu'un, R^2. Ce sera le premier terme du polynôme quotient. 1 sera alors le premier terme du polynôme diviseur, car multiplié par R^2, cela donne R^2 que l'on extrait du polynôme de base, qui devient le polynôme reste.

On cherche dans le polynôme reste, sans se préoccuper des coefficients numériques, les termes qui ont un multiple commun avec les termes du polynôme quotient. Ici, il n'en a qu'un R^2, ce sont donc les multiples de R^2.

On trouve $-R^2LC\omega^2$, $R^2L^2C^2\omega^4$, $R^4C^2\omega^2$. En les divisant par R^2 , cela donne les termes suivants du polynôme diviseur qui devient :

$P_D = 1 - LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2$

On extrait les termes produits du polynôme reste, d'où:

$P_R = L^2\omega^2 - R^2LC\omega^2 - 2L^3C\omega^4 + R^2L^2C^2\omega^4 + L^4C^2\omega^6$

Le polynôme quotient est toujours : $P_Q = R^2$

On cherche maintenant dans le polynôme reste P_R les termes qui ont un multiple commun avec le polynôme diviseur P_D .

On trouve: $L^2\omega^2 - L^3C\omega^4 + R^2L^2C^2\omega^4 + L^4C^2\omega^6$, qui sont multiple par $L^2\omega^2$, d'où:

$P_Q = R^2 + L^2\omega^2$ et $P_R = -R^2LC\omega^2 - L^3C\omega^4$

Les termes qui restent doivent être multiples de P_Q ou bien de P_D , et on ajoute un terme soit dans P_D , soit dans P_Q. Si ce n'est pas le cas, alors le polynôme n'est pas décomposable.

Comme ils ne sont que deux, ils ne peuvent être multiples que de P_Q.

Ils le sont par $-LC\omega^2$, qu'on ajoute à P_D, d'où $P_R = 0$ et

$$P_D = 1 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2$$

On a finalement:

$$N = (R^2 + L^2\omega^2)(1 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2)$$

et:

$$|Z(R)|^2 = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}$$

$$\frac{R_1^2 + \omega^2 L^2}{R_1^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2} = \frac{R_2^2 + \omega^2 L^2}{R_2^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} R_1^2R_2^2C^2\omega^2 + R_1^2(1 - LC\omega^2)^2 \\ + R_2^2L^2C^2\omega^4 + (1 - LC\omega^2)^2L^2\omega^2 \end{matrix}\right\} &= \left\{\begin{matrix} R_1^2R_2^2C^2\omega^2 + R_2^2(1 - LC\omega^2)^2 \\ + R_1^2L^2C^2\omega^4 + (1 - LC\omega^2)^2L^2\omega^2 \end{matrix}\right. \\ R_1^2[(1 - LC\omega^2)^2 - L^2C^2\omega^4] &= R_2^2[(1 - LC\omega^2)^2 - L^2C^2\omega^4] \end{aligned}$$

L'égalité devant être vraie quelque soit R , il faut avoir :

$$(1 - LC\omega^2)^2 - L^2C^2\omega^4 = 0$$

d'où:

$$2LC\omega^2 = 1$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

L'impédance correspondante est donnée par:

$$\begin{aligned} Z^2 &= \frac{R^2 + L^2/2LC}{R^2C^2/2LC + (1 - LC/2LC)^2} \\ &= \frac{R^2 + L/2C}{R^2C/2L + (\frac{1}{2})^2} \\ &= 2\frac{L}{C}\frac{R^2 + L/2C}{R^2 + L/2C} \\ &= 2\frac{L}{C} \end{aligned}$$

$$|Z| = \sqrt{2\frac{L}{C}}$$

La simplification de |Z| trouvée grâce à cette recherche permet de reprendre le calcul de la dérivée de $|(Z|)^2$, il vient:

$$\left(\frac{R^2 + \omega^2L^2}{R^2C^2\omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}\right)' = \left\{\begin{matrix} 2L^2\omega[(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2] \\ -(R^2 + L^2\omega^2)[-2(1 - LC\omega^2)2LCw + 2R^2C^2\omega] \end{matrix}\right\}\frac{1}{D^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\omega}{D^2}[(L^2 + L^4C^2\omega^4 - 2L^3C\omega^2 + R^2L^2C^2\omega^2 - (-2R^2LC + 2R^2L^2C^2\omega^2 + R^4C^2 \\ &\qquad - 2L^3C\omega^2 + 2L^4C^2\omega^4 + R^2L^2C^2\omega^2)] \\ &= \frac{2\omega}{D^2}(L^2 - R^4C^2 + 2R^2LC - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4) \end{aligned}$$

Pris par ce bout, les calculs sont beaucoup plus simples. Comme le dit Mr ARSAC, un programme, on sait l'écrire clairement quand on l'a terminé.

La courbe qui a son sommet au point d'intersction est donnée par $(|Z|)' = 0$

pour $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Soit $L^2 - R^4C^2 + 2R^2LC - 2R^2L^2C^2\omega^2 - L^4C^2\omega^4 = 0$ d'où $R = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Les courbes paramétriques de l'impédance en fonction de R_e et X_e, avec toujours des valeurs de résistance exagérées pour rendre les écarts significatifs, montrent que la pulsation de déphasage nul ($\mathrm{tg}\phi = X_e/R_e = 0$) est différente de la pulsation donnant l'impédance maximum.

La plupart des auteurs de manuels d'électronique appelle pulsation de résonnance celle qui correspond au déphasage nul :

$\mathrm{tg}\phi = 0 \Rightarrow X_e = 0 \Rightarrow L(1 - LC\omega^2) - R^2C = 0$ donne immédiatement:

$$LC\omega^2 = 1 - \frac{R^2C}{L}$$

(Les calculs sont effectivement plus simples, il n'y a pas de quoi en écrire un livre, et pourtant!)

La célèbre formule de Mr Thomson, établie par des calculs obscurs, pour une résonnance pas très précisée, donne:

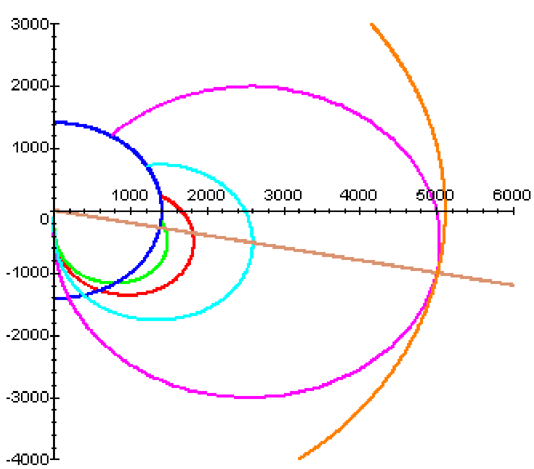
$$LC\omega^2 = 1 - \frac{1}{4}\frac{R^2C}{L}$$

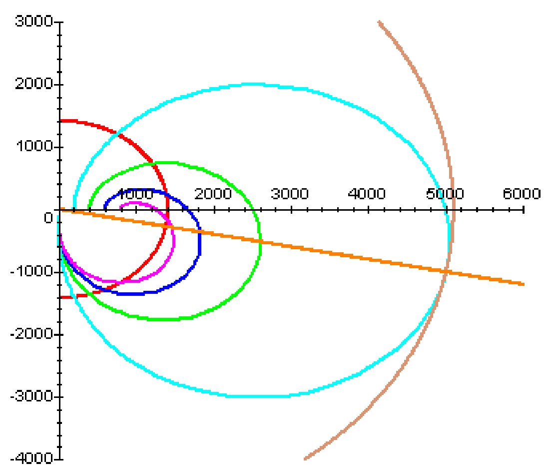
Celle que nous avons établie précédemment avec des calculs rigoureux donne au deuxième ordre:

$$LC\omega^2 = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{R^2C}{L}\right)^2$$

elle est d'une approximation meilleure par rapport à $LC\omega^2 = 1$, puisque l'infiniment petit est au carré.

Dans la pratique, cela se confond évidemment à 10^{-6} près.





Le petit demi-cercle est le lieu des points où l'amplitude et la pulsation sont indépendantes de la résistance de la bobine. Sur le diagramme de gauche on a supprimé les parties des courbes pour $\omega \in [0; 1/\sqrt{2LC}]$.

La droite donne le point d'amplitude maximum, c'est à dire à la résonnance, représenté ici pour une résistance de 200 Ω :

$$\tan\phi = \frac{\omega}{R}[L(1 - LC\omega^2) - R^2C] = \frac{\omega_{\text{res}}L}{R}\sqrt{1 + 2R^2C}$$

$$\text{soit} \quad \phi = -11,09 \text{ degrés}$$

$$\text{avec} \quad \omega = 999615 \text{ Hertz.} \quad (LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = 10^6, \text{ avec les paramètres choisis.})$$

On a $\tan\phi = 0$ pour $\omega = 979795$ Hertz, soit un écart de 19819 Hertz, environ 20 kHertz, 2%, ce qui est énorme, mais n'oublions pas que la résistance est exagérément énorme, pour que les écarts soient significatifs.