Le long parcours de la résolution

d'une équation du 4 ème degré

Résumé

Dans tous les ouvrages de mathématiques abordant la résolution des équations de degré supérieur à deux on retrouve inlassablement l'exemple de Mr Jérome Cardan datant du moyen âge, à savoir la fameuse équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, avec sa relation associée $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} = (2 \pm \sqrt{-1}) = 4$.

A propos d'un exercice que mon fils a résolu avec Maple, j'ai voulu refaire le long chemin caillouteux de cette résolution, en passant par le moyen âge.

Cet résolution a été possible car on était dans un cas où les radicaux cubiques se simplifient, permettant de résoudre une équation du quatrième degré, qui n'est pas bicarrée, par radicaux du deuxième degré calculable arithmétiquement.

Jean Dupont

Considérons l'équation $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Cherchons à la résoudre par la méthode de Descartes:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

il faut la transformer en sa forme canonique par translation: $x = X + \alpha$

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= X^4 + 0 + pX^2 + qX + r \\ &= X^4 + 4\alpha X^3 + 6\alpha^2 X^2 + 4\alpha^3 X + \alpha^4 \\ &\qquad + X^3 + 3\alpha X^2 + 3\alpha^2 X + \alpha^3 \\ &\qquad + X^2 + 2\alpha X + \alpha^2 \\ &\qquad X + \alpha \\ &\qquad + 1 \end{aligned}$$

d'où, par identification: $4\alpha + 1 = 0$ et $\alpha = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} p &= 6\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 5/8 \\ q &= 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 5/8 \\ r &= \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 205/256 = 5.41/256 \end{aligned}$$

et:

$$X^4 + \frac{5.32}{256}X^2 + \frac{5.32}{256}X + \frac{5.41}{256} = 0$$

avec: $U = 4X$ $\quad U^2 = 4^2 X^2$ $\quad U^4 = 4^4 X^4$

$$\begin{aligned} U^4 + 5.2U^2 + 5.8U + 5.41 &= U^4 + p'U^2 + q'U + r' \\ &= (U^2 + a'U + b')(U^2 + c'U + d') \\ &= 0 \end{aligned}$$

par développement et identification et résolution du système, on obtient:

$$c' = -a' \qquad b' + d' = p' + a'^2 \qquad -b' + d' = q'/a' \qquad b'd' = r'$$

$$b' = \frac{1}{2}(p' + a' - \frac{q'}{a'})$$

$$d' = \frac{1}{2}(p' + a' + \frac{q'}{a'})$$

$$(a'p' - q' + a'^3)(a'p' + q' + a'^3) = 4r'a'^2$$

$$a'^6 + 2p'a'^4 + (p'^2 - 4r')a'^2 - q'^2 = 0$$

d'où, avec $A = a'^2$ l'équation du 3 ème degré:

$$A^3 + 2p'A^2 + (p'^2 - 4r')A - q'^2 = 0$$

on a descendu le degré de l'équation de départ de une unité.

$$A^3 + 20A^2 - 720A - 1600 = 0$$

$$A^3 + 4.5A^2 - 4^2.3^2.5A - 4^3.5^2 = 0$$

Equation à résoudre suivant la méthode de Cardan (année 1545, cela donne à méditer).

Il faut, là encore, la transformer en forme canonique: $A = \xi + \alpha'$

$$\begin{aligned} \xi^3 + 0 + s\xi + t &= \xi^3 + 3\alpha'\xi^2 + 3\alpha'^2\xi + \alpha'^3 \\ &\quad + 20(\xi^2 + 2\alpha'\xi + \alpha'^2) \\ &\quad - 720(\xi + \alpha') \\ &\quad - 1600 \end{aligned}$$

d'où par identifiction: $3\alpha' + 20 = 0 \quad \alpha' = -\frac{20}{3}$

$$s = 3\alpha'^2 + 40\alpha' - 720 = -\frac{2560}{3} = -256\frac{10}{3}$$

$$t = \alpha'^3 + 20\alpha'^2 - 720\alpha' - 1600 = \frac{20^2}{3^3}(-20 + 3.20 + 36.3^3 - 4.3^3) = 20^2\frac{256}{3^3}$$

et:

$$\xi^3 - 256\frac{10}{3}\xi + 256\frac{20^2}{3^3} = 0$$

en suivant la méthode de Cardan:

$$D^2 = (\frac{t}{2})^2 + (\frac{s}{3})^3 = \frac{1}{4}(256\frac{20^2}{3^3})^2 - \frac{1}{3^3}(256\frac{10}{3^3})^3$$

après quelques calculs de mise en facteurs: $D^2 = -(256.\frac{20}{3})^2\frac{20}{3}$

D'où:

$$\xi = \sqrt[3]{-\frac{t}{2} + D} + \sqrt[3]{-\frac{t}{2 - D}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{256}{2}(\frac{20}{3})^2\frac{1}{3} + 256\frac{20}{3}\sqrt{-\frac{20}{3}}} + \sqrt[3]{-\frac{t}{2} - D}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sqrt[3]{-10^2 + 3^2.10\sqrt{-\frac{20}{3}}} + \sqrt[3]{-10^2 - 3^2.10\sqrt{-\frac{20}{3}}}\right)$$

Maintenant on cherche un nombre dont le cube est égal au nombre qui est dans la racine cubique.

Il y a sous le radical cubique du 10 et du 3, cherchons le développement de:

$$\left(-10+3\sqrt{-\frac{20}{3}}\right)^3=-1000+1800+\sqrt{-\frac{20}{3}}(900-180)$$

Les écarts sont grands et ils nous faut un signe - devant l'entier, essayont:

$$\begin{aligned}\left(+5+\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}}\right)^3 &= 125+3.5^2\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}}-3.5\frac{9}{4}.\frac{20}{3}-\frac{3^3}{2^3}\frac{20}{3}\sqrt{-\frac{20}{3}}\\ &= -100+90\sqrt{-\frac{20}{3}}\end{aligned}$$

Donc:

$$\sqrt[3]{-10^2+3^2.10\sqrt{-\frac{20}{3}}}=5+\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}}$$

et:

$$\sqrt[3]{-10^2-3^2.10\sqrt{-\frac{20}{3}}}=5-\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}}$$

d'où :

$$\xi=\frac{8}{3}(5+\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}}+5-\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{20}{3}})=\frac{80}{3}$$

On aurait pu atteindre le même résultat en remarquant qu'il y a des 8, que $8^3=2^9=512=2.256$, après quelques tâtonnements on aurait vérifié que 8.5.2/3=80/3 est solution de l'équation en ξ :

$$\frac{8^3}{3^3}(5.2)^3-\frac{8^3}{3^3}3.5^2.2.8+\frac{8^3}{3^3}2^3.5^2$$

$$=\frac{8^3}{3^3}(1000-1200+200)=0$$

Alors quel est l'intérêt de la méthode de Cardan, puisqu'on ne peut éliminer les racines cubiques que s'il y a une solution appartenant à $\mathbb{Q}$, et que cette solution il faut la trouver par tâtonnement.

En suite, on peut poser $(a+k\sqrt{b})^3=a^3+3a\mathrm{bk}^2+(3a^2k+bk^3)\sqrt{b}=A+B\sqrt{b}$

et, pour que les deux égalités $A=a^3+3a\mathrm{bk}^2$ et $B=3a^2k+bk^3$ soient strictement possibles, il faut au minimum que les quatre nombres a,b,A,B appartiennent à $\mathbb{Q}$.

Comme on connaît $a=\xi/2$, la première équation donne deux valeurs de k, et la deuxième permet de retenir la valeur qui satisfait à cette équation. Cela ne sert plus, puisque les deux autres racines seront calculées par une équation du second degré: on a à nouveau baissé de une unité le degré de la résolution.

Il n'y a que dans ce cas qu'on peut calculer les racines à la règle et au compas, je veux dire à la plume et au papier, arithmétiquement.

Peut-on dire qu'une équation est soluble quand on ne sait pas calculer ses racines autrement que par approximations et à l'aide d'ordinateurs, cas des racines cubiques déjà. Alors, en contre partie, on peut dire que toutes les équations sont solubles, ce qui n'est pas conforme, ni dans le premier cas, ni dans le second avec la théorie de la résolvabilité des équations de Mr Evariste Galois.

Personnellement j'oserais dire qu'on ne sais pas résoudre les équations au delà du second degré, sauf dans des cas particuliers très accommodants, comme on ne sais pas résoudre les problèmes de mécanique au dela de deux corps en interaction, comme on ne sais pas représenter l'espace au delà de deux dimensions par des construction à la règle et au compas, ou résoudre les équations différentielles supérieures à l'ordre deux et encore faut-il qu'elles soient linéaires.

Deux c'est l'ordre du théorème de Mr FERMAT.

Deux c'est l'ordre naturel, l'ordre de la vie.

Reprenons notre problème et mettons cette solution en facteur dans l'équation en ξ :

$$\begin{aligned}&\xi^3 - 256\frac{10}{3}\xi + 256\frac{2^2}{3}.\frac{10^2}{3^2}\\ &= (\xi - \frac{10}{3}8)(\xi^2 + \beta\xi + \gamma)\\ &= \xi^3 - \frac{10}{3}8\xi^2 + \beta\xi^2 - \frac{10}{3}8\beta\xi + \gamma\xi - \frac{10}{3}8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{10}{3}8 + \beta &= 0\\ -\frac{10}{3}8\gamma &= 256\frac{2^2}{3}.\frac{10^2}{3^2}\\ -\frac{10}{3}8\beta + \gamma &= -256\frac{10}{3}\end{aligned}$$

d'où : $\beta = \frac{80}{3}$ et $\gamma = -5(\frac{16}{3})^2$, on vérifiera que la 3 ème équation est vérifiée.

et:

$$(\xi - \frac{10}{3}8)\left(\xi^2 + \frac{10}{3}8\xi - (\frac{16}{3})^2 5\right) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (\frac{10}{3}4)^2 + \frac{256.5}{3^2} = 5.8^2$$

et :

$$\xi_2, \xi_3 = -\frac{40}{3} \pm 8\sqrt{5}$$

Ce qui donne : $A = \xi + \alpha' = \frac{80}{3} - \frac{20}{3} = 20$

d'où : $a' = \sqrt{A} = 2\sqrt{5}$, $c' = -a' = -2\sqrt{5}$

$b' = \frac{1}{2}(p' + a'^2 - \frac{q'}{a'}) = \frac{1}{2}(5.2 + 4.5 - \frac{5.8}{2.\sqrt{5}}) = 3.5 - 2\sqrt{5}$

$d' = \frac{1}{2}(p' + a'^2 + \frac{q'}{a'}) = \frac{1}{2}(5.2 + 4.5 + \frac{5.8}{2.\sqrt{5}}) = 3.5 + 2\sqrt{5}$

et, en remontant:

$$\begin{aligned}P(X^4) &= \frac{P((4X)^4)}{256} = \frac{P(U^4)}{256}\\ &= \frac{1}{256}(U^2 + 2\sqrt{5}U + 15 - 2\sqrt{5})(U^2 - 2\sqrt{5}U + 15 + 2\sqrt{5})\\ &= \frac{1}{256}(4^2X^2 + 2\sqrt{5}.4X + 15 - 2\sqrt{5})(4^2X^2 - 2\sqrt{5}.4X + 15 + 2\sqrt{5})\\ &= (X^2 + \frac{2\sqrt{5}}{4}X + \frac{15 - 2\sqrt{5}}{16})(X^2 - \frac{2\sqrt{5}}{4}X + \frac{15 + 2\sqrt{5}}{16})\end{aligned}$$

$X = x - \alpha = x + \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} P(x^4) &= [(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{2\sqrt{5}}{4}(x+\frac{1}{4}) + \frac{15-2\sqrt{5}}{16}][(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{2\sqrt{5}}{4}(x+\frac{1}{4}) + \frac{15+2\sqrt{5}}{16}] \\ P(x^4) &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1) \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 4 = \tfrac{-2.5+2\sqrt{5}}{4} = -\tfrac{2.5-2\sqrt{5}}{4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{2.5-2\sqrt{5}}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\Delta_2 = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - 4 = \tfrac{-2.5-2\sqrt{5}}{4} = -\tfrac{2.5+2\sqrt{5}}{4}$$

$$x_3, x_4 = \frac{1}{2}(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{2.5+2\sqrt{5}}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm i\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

Voilà les résultats que vous trouverez instantanément sur Maple, qui utilise on ne sait quel algorithme!

Petites remarques : $\left(\sqrt{-1}\right)^3 \neq \sqrt{(-1)^3}$

en effet: $(\sqrt{-1})^3 = i^3 = i^2 i = -i$

et : $\sqrt{(-1)^3} = \sqrt{-1} = i$

à ne pas confondre également avec les trois racines cubiques de l'unité qui sont données par:

$x^3 = 1 \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

soit: $x_1 = 1 \qquad x_2, x_3 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui sont aux trois sommets du triangle équilatéral du cercle trigonométrique unité.

De même $(\sqrt{-1})^2 = -1$ car $(\sqrt{i^2})^2 = (i)^2 = -1$, et $\sqrt{(-1)^2} = 1$, alors que $\sqrt{(i^2)^2} = i^2 = -1$, en fait, il faut revenir à la définition de la racine carrée : $\sqrt{a^2} = |a|$ d'où $\sqrt{(i^2)^2} = |i^2| = 1$, qui se confondent avec les deux racines carrées de l'unité $x^2 = 1 \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad x = \pm 1$.

Rappelons que $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ car $(\sqrt{i})^2 = \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$ (petits souvenirs de mathématiques élémentaires).

Attention $(a^n)^{\frac{1}{n}}$ ou $(a^{\frac{1}{n}})^n \neq a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ pour $a < 0$.

Les exposants fractionnaires ne sont pas commutables ou, abélien pour faire plus mode.